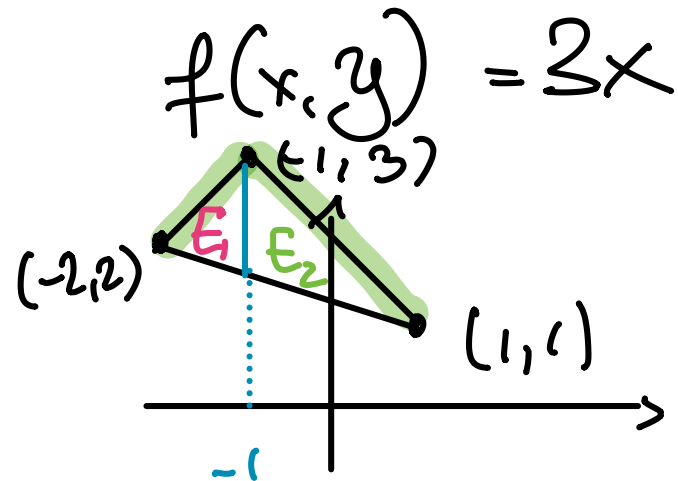


Info : Ressources de révision. Examen blanc + examen  
de l'année passée sur moodle  
Corrigé vidéo + Exos générés aléatoirement

## Rappel

Exemple 7.6 : Découpage.

(i) Soit  $E = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}, y \leq -x + 2, y \leq x + 4 \}$



$$E_1 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-2, -1], -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3} \leq y \leq x + 4 \}$$

$$E_2 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1, 1], -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3} \leq y \leq -x + 2 \}$$

$$\iint_{E_1} f(x, y) dx dy = \int_{-2}^{-1} \int_{-\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}}^{x+4} 3x dy dx$$

$$= \int_{-2}^{-1} 4x^2 + 8x dx = -\frac{8}{3}$$

$$\iint_{E_2} f(x, y) dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}}^{-x+2} 3x dy dx$$

$$= \int_{-1}^1 -2x^2 + 2x dx = -\frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \iint_E f(x, y) dx dy \stackrel{1}{=} \iint_{E_1} f(x, y) dx dy + \iint_{E_2} f(x, y) dx dy$$

$$\text{int}(E_1) \cap \text{int}(E_2) = \emptyset$$

$$E = E_1 \cup E_2$$

$$= -\frac{8}{3} - \frac{4}{3} = -4.$$

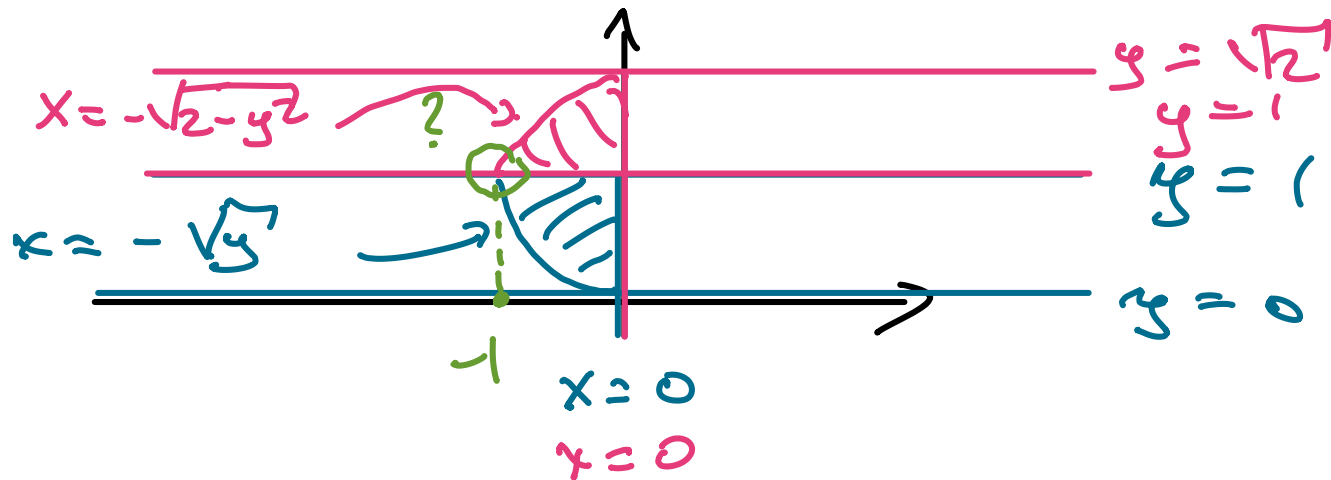
$$(ii) \int_0^1 \int_{-\sqrt{y}}^0 f(x,y) dx dy + \int_1^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2-y^2}}^0 f(x,y) dx dy$$

$$= \iint_{E_1} f(x,y) dx dy + \iint_{E_2} f(x,y) dx dy$$

avec

$$E_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, -\sqrt{y} \leq x \leq 0\}$$

$$E_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq y \leq \sqrt{2}, -\sqrt{2-y^2} \leq x \leq 0\}$$



$-\sqrt{y}$  avec  $y=1, -1$

$-\sqrt{2-y^2}$  avec  $y=1, -1$

$$x = -\sqrt{2-y^2} \Rightarrow x^2 = 2-y^2$$

$$\Rightarrow y^2 = 2-x^2$$

$$y \geq 0 \Rightarrow y = \sqrt{2-x^2}$$

$$x = -\sqrt{y} \Rightarrow x^2 = y$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^0 \int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y) dy dx.$$

En particulier,  $E_1 \cup E_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 0, x^2 \leq y \leq \sqrt{2-x^2}\}$

Définition 7.7: Aire

Soit  $E \subseteq \mathbb{R}^2$  un ensemble fermé borné. L'aire de  $E$  est définie par  $\text{Aire}(E) = \iint_E 1 dx dy$ .

### Théorème 7.8 Formule de changement de variables

Soit  $E, F \subseteq \mathbb{R}^2$  deux ensembles fermés bornés,

$\varphi: E \rightarrow F : (u, v) \mapsto \varphi(u, v)$  une fonction de classe  $C^1$ , bijective tq  $\forall (u, v) \in E$ ,  $\det \nabla \varphi(u, v) \neq 0$

Alors,

$$\iint_F f(x, y) dx dy = \iint_E f(\varphi(u, v)) \cdot |\det \nabla \varphi(u, v)| du dv.$$

### Définition Jacobien

Soit  $\varphi$  comme ci-dessus. Le jacobien de  $\varphi$

noté  $\text{Jac } \varphi(u, v)$  est défini par

$$\text{Jac } \varphi(u, v) = \det \nabla \varphi(u, v),$$

Remarque 7.10 : Pourquoi la valeur absolue ?

Rappel d'analyse I

$\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$  bijective,  $\varphi, \varphi^{-1} \in \mathcal{C}^1$ .

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx$$

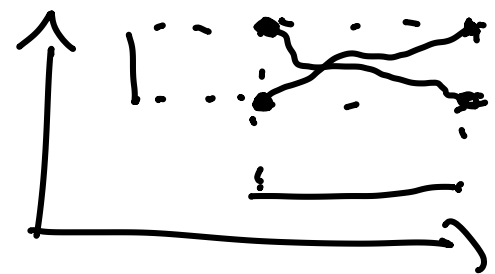
Cas 1  $\varphi$  est strictement croissante

$$a = \varphi(\alpha) < \varphi(\beta) = b \text{ et } \varphi'(x) \geq 0$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx$$

$\varphi' \geq 0 \swarrow \Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(x)) \cdot |\varphi'(x)| dx$

Cas 2 :  $\varphi$  est strictement décroissante



$$a = \varphi(\beta) < \varphi(\alpha) = b \quad \text{et} \quad \varphi'(x) \leq 0$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx = \int_{\varphi(\beta)}^{\varphi(\alpha)} f(x) dx = - \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx$$

$$= - \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(x)) \underbrace{(-\varphi'(x))}_{= |\varphi'(x)|} dx$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(x)) \cdot |\varphi'(x)| dx$$

$\Rightarrow$  1.1 prend en compte les éventuels changements de sens de parcours.

## § 7.2 Intégrales doubles en coordonnées polaires

Exemple 7.1 : Jacobien des coordonnées polaires.

Soit  $\varphi: \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par  
 $\varphi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$

peut être remplacé par  
n'importe quel intervalle de  
longueur  $2\pi$  ( $[-\pi, \pi]$ , ...)

Exemple 4.35 (i)  $\rightarrow \nabla \varphi(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$

$$\text{Jac } \varphi(r, \theta) = \det \nabla \varphi(r, \theta) = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r.$$

## Exemple 7.12

(i) soit  $E = \overline{B}((0,0), 1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

$$f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2.$$

3 options:

$E$  est  $y$  simple:  $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1,1], -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$

$E$  est  $x$  simple:  $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1,1], -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2}\}$

coordonnées polaires:  $\{(r \cos \theta, r \sin \theta) : r \in [0,1], \theta \in [0,2\pi]\}$

How?

$(x,y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$

$r \geq 0, \theta \in [0,2\pi]$

$$x^2 + y^2 \leq 1 \quad \Leftrightarrow r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} r^2 \leq 1, \\ r \geq 0 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow r \leq 1$$

$$\Rightarrow r \in [0, 1], \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Les calculs dans les opérateurs  $x$ -simple,  $y$ -simple sont pas cool :''  $\left( \int x^2 \sqrt{1-x^2}, \int (1-x^2)^{3/2} \dots \right)$

en coordonnées polaires :

$$\iint_E f(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} f(r \cos \theta, r \sin \theta) \cdot r d\theta dr$$

Jacobien!

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^3 + 2r^3 \cos \theta \sin \theta d\theta dr$$

$$\int_0^1 r^3 \left[ \theta + \sin^2 \theta \right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} dr = 2\pi \int_0^1 r^3 dr = \frac{1}{2} \pi$$

$$\varphi : [0, 1] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$$

$\rightarrow$  problème d'injectivité,  $r=0$ , ou  $\theta=0$  &  $\theta=2\pi$

$\rightarrow$  fac  $\varphi(0, \theta) = 0 \quad \forall \theta$ .

Les problèmes sont sur  $\partial [0, 1] \times [0, 2\pi] \rightarrow$  l'intégrale ne le voit pas.

(ii) avec des contraintes sur  $\partial$ .

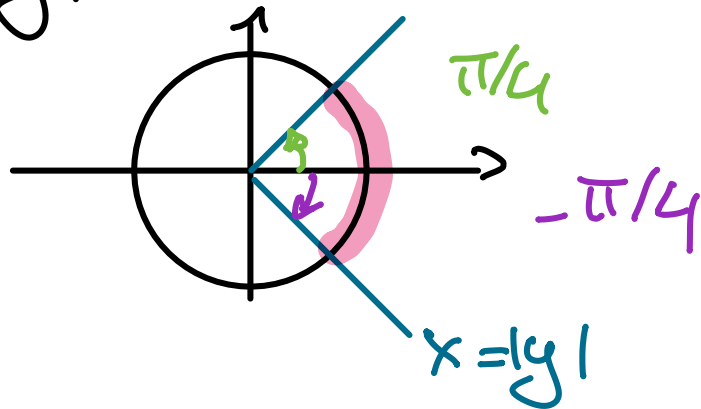
$$\text{Soit } E = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9 \quad x \geq |y| \}$$

Coordonnées polaires:  $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$   $r \geq 0, \theta \in [0, 2\pi]$

$$x^2 + y^2 \leq 9 \iff r^2 \leq 9$$

$$\iff r \leq 3 \quad \rightarrow \quad r \in [0, 3]$$

$$x \geq |y| \iff r \cos \theta \geq r |\sin \theta| \iff \cos \theta \geq |\sin \theta|$$



$$\Rightarrow \theta \in [-\pi/4, \pi/4]$$

$$\text{En vrai, } \theta \in [0, 2\pi], \cos \theta \geq |\sin \theta|$$

$$\Rightarrow \theta \in [0, \pi/4] \cup [7\pi/4, 2\pi]$$

⚠ à la base,  $\theta \in$  "un intervalle de longueur  $2\pi$ "  
si on avait commencé avec  $\theta \in [-\pi, \pi]$ ,  
on obtient  $\theta \in [-\pi/4, \pi/4]$

$$\Rightarrow \iint_E f(x, y) dx dy = \int_0^2 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r d\theta dr$$

(iii) Ensemble sample dans  $\mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi]$

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0, \underbrace{\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)}_{\text{impossible à dessiner!}} \geq \underbrace{x^2 + y^2}_2\}$$

$$(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta), \quad r \geq 0, \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

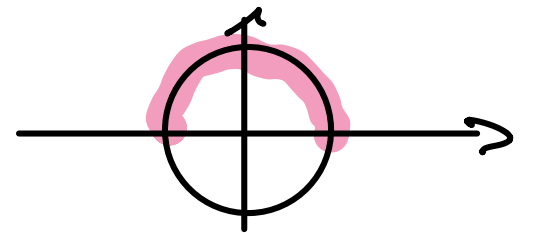
$$x^2 + y^2 \leq 4 \Leftrightarrow r \in [0, 2]$$

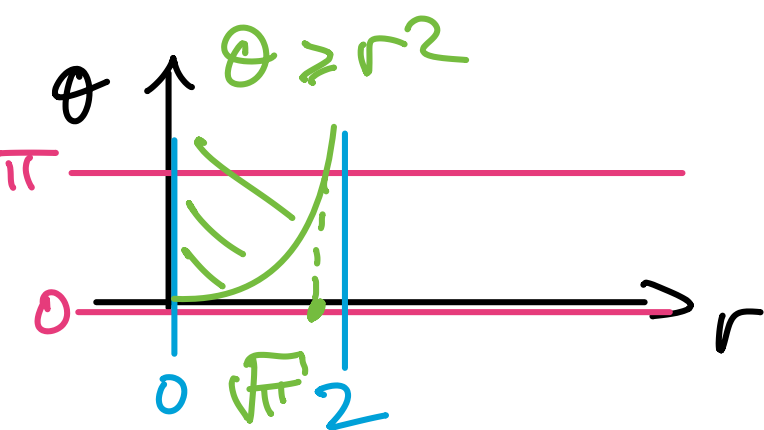
$$y \geq 0 \Leftrightarrow r \sin \theta \geq 0 \Leftrightarrow \sin \theta \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \theta \in [0, \pi]$$

$$\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \geq x^2 + y^2 \Leftrightarrow \arccos\left(\frac{r \cos \theta}{r}\right) \geq r^2$$

$$\Leftrightarrow \theta \geq r^2$$





$$\Rightarrow E = \{ (r \cos \theta, r \sin \theta) : r \in [0, \sqrt{\pi}], \\ r^2 \leq \theta \leq \pi \}$$

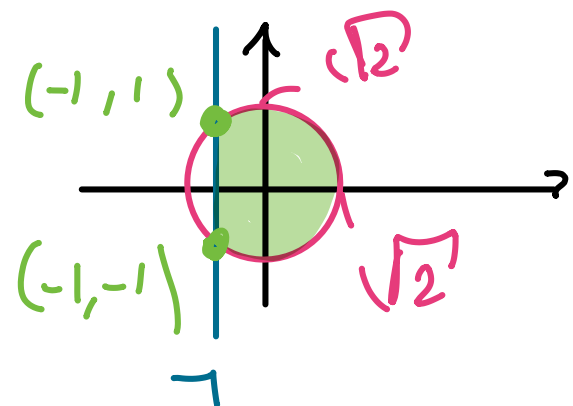
$$= \{ (r \cos \theta, r \sin \theta) : \theta \in [0, \pi], r \in [0, \sqrt{\theta}] \}$$

$$\Rightarrow \iint_E f(x, y) dx dy = \int_0^{\sqrt{\pi}} \int_{r^2}^{\pi} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r d\theta dr$$

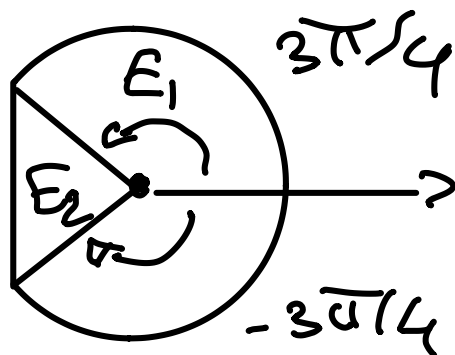
$$= \int_0^{\pi} \int_0^{\sqrt{\theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

(iV) Avec découpage.

$$E = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2, x \geq -1 \}$$



$$x = -1, \quad x^2 + y^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad y = \pm 1$$



$$E = E_1 \cup E_2, \quad E_1 = \{(r \cos \theta, r \sin \theta) : r \in [0, \sqrt{2}], \theta \in [-\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]\}$$

$$E_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1, 0], x \leq y \leq -x\}$$

$$= \{(r \cos \theta, r \sin \theta) : \theta \in [\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}], 0 \leq r \leq \frac{-1}{\cos \theta}\}$$

$$x \geq -1 \Leftrightarrow r \cos \theta \geq -1$$

$$\cos \theta \leq 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$r \leq \frac{-1}{\cos \theta}$$

How?

$$\int_E f(x,y) dx dy = \int_0^{\sqrt{2}} \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r d\theta dr$$

$$+ \int_{-1}^0 \int_x^{-x} f(x,y) dy dx$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r d\theta dr$$

$$+ \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \int_0^{-\frac{1}{\cos \theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) \cdot r dr d\theta$$

→ risque de donner des soucis

§7.3 Intégrales triples en coordonnées cartésiennes  
À la place de  $\iint$ , c'est  $\iiint$ .

Exemple 5.13

(i)  $E = [a, b] \times [c, d] \times [r, s]$      $f(x, y, z) = xyz$

$$\iiint_E f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \int_c^d \int_r^s xyz dz dy dx$$

$$= \int_a^b \int_c^d xy \left[ \frac{1}{2} z^2 \right]_{z=r}^{z=s} dy dx = \frac{1}{2} (s^2 - r^2) \int_a^b \int_c^d xy dy dx$$

$$= \dots = \frac{1}{8} (b^2 - a^2) (d^2 - c^2) (s^2 - r^2)$$